JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 44, 183–189 (1985)

# Ein Satz von Orlicz in distributionentheoretischer Fassung

HERBERT HAF

*Universität Kassel, West Germany*

*Communicated by P. L. Butzer*

Received March 23, 1983

HERRN PROFESSOR DR. P. WERNER ZUM 50. GEBURTSTAG

## 1. EINLEITUNG

In der Approximationstheorie werden singuläre Integrale für Funktionen $f$ aus $C[a, b]$ bzw. $L_p[a, b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$[1] durch

$$f_n^s(x) = \int_a^b \chi_n(x, u) f(u)\, du, \qquad x \in [a, b],\ n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

erklärt und Konvergenzsätze unterschiedlicher Art bewiesen. So besagt z.B. ein Resultat von W. Orlicz: Ist $f \in L_p[a, b]$ und genügt die Kernfunktion $\chi_n$

$$\int_a^b |\chi_n(x, u)|\, du \leqslant M \qquad \text{und} \qquad \int_a^b |\chi_n(x, u)|\, dx \leqslant M \tag{1.2}$$

für fast alle $x$ bzw. fast alle $u$ in $[a, b]$, so ist

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n^s\|_p = 0, \tag{1.3}$$

falls (1.3) für alle Elemente einer in $L_p[a, b]$ dichten Funktionenklasse gilt (s. [3]).

Wir wollen im folgenden zeigen, daß sich Sätze dieser Art in einer natürlichen Weise auch distributionentheoretisch ohne Verwendung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie gewinnen lassen. Hierzu legen wir unseren Betrachtungen die von P. Werner [5] eingeführten Distributionenräume $\mathscr{L}_p(\Omega)$ (vgl. § 2) zugrunde.

[1] $L_p[a, b]$ ist hierbei der $B$-Raum aller im Sinne von Lebesgue zur $p$-ten Potenz absolut integrierbaren Funktionen mit $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p\, dx)^{1/p}$.



0021-9045/85 $3.00

Copyright © 1985 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

In § 2 stellen wir die benötigten Hilfsmittel bereit. In § 3 werden singuläre Integrale in den Distributionenräumen $\mathscr{L}_p(\Omega)$ definiert und Konvergenzuntersuchungen durchgeführt. Insbesondere wird das o.g. Ergebnis von Orlicz neu bewiesen. Als Anwendung diskutieren wir in § 4 die singulären Integrale von Landau.

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß die Resultate dieser Arbeit bekannt sind. Unser Anliegen besteht lediglich darin, einen distributionentheoretischen Zugang auf der durch P. Werner gelegten Grundlage aufzuzeigen.

## 2. Hilfsmittel

Wir stellen einige Grundlagen bereit, die wir im folgenden benötigen. Sei $\Omega$ eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}$ und bezeichne $C_0(\Omega)$ bzw. $C_0^\infty(\Omega)$ wie üblich den linearen Raum aller stetigen bzw. beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem, in $\Omega$ enthaltenem Support. Ist dann $B$ der Banach–Raum aller beschränkten linearen Funktionale $F$ auf $(C_0^\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ ($\| \ \|_\infty$ bezeichne die Supremum-Norm in $C_0^\infty(\Omega)$) mit der Norm

$$\|F\|_1 = \sup\{|F\varphi| : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \|\varphi\|_\infty = 1\}, \tag{2.1}$$

so wird $\mathscr{L}_1(\Omega)$ von P. Werner [5] als Vervollständigung von $(C_0^\infty(\Omega), \| \ \|_1)$ innerhalb $B$ erklärt. Dabei ist für $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|u\|_1 = \int |u(x)| \, dx, \tag{2.2}$$

wobei das Integral im Riemannschen Sinn zu verstehen und hier, wie auch im folgenden, über ganz $\mathbb{R}$ zu erstrecken ist. Eine von $B$ unabhängige Charakterisierung von $\mathscr{L}_1(\Omega)$ ist gegeben durch

Lemma 2.1. *$\mathscr{L}_1(\Omega)$ ist die Menge aller Funktionale $F$ auf $C_0^\infty(\Omega)$, die sich in der Form*

$$F\varphi = \lim_{k \to \infty} \int f_k \varphi \, dx \tag{2.3}$$

*mit $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\|f_k - f_j\|_1 \to 0$ für $k, j \to \infty$ darstellen lassen. Ferner gilt*

$$\|F\|_1 = \lim_{k \to \infty} \|f_k\|_1. \tag{2.4}$$

*Beweis.* s. [5].

Entsprechend werden in [4] bzw. [5] die Räume $\mathscr{L}_p(\Omega)$ $(p>1)$ erklärt: Für $1<p<\infty$ und $(1/p)+(1/q)=1$ ist $\mathscr{L}_p(\Omega)$ der lineare Raum aller beschränkten linearen Funktionale $F$ auf $(C_0^\infty(\Omega), \|\ \|_p)$, wobei die Norm in $\mathscr{L}_p(\Omega)$ durch

$$\|F\|_p = \sup\{|F\varphi| \colon \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \|\varphi\|_q = 1\} \tag{2.5}$$

gegeben ist. Dabei ist (im Riemannschen Sinn)

$$\|\varphi\|_q = \left(\int |\varphi(x)|^q\,dx\right)^{1/q}. \tag{2.6}$$

Insbesondere wird in [5] gezeigt, daß die durch $u \in C_0(\Omega)$ induzierten Funktionale zu $\mathscr{L}_p(\Omega)$ gehören und $(C_0(\Omega), \|\ \|_p)$ als (dichter) Teilraum von $\mathscr{L}_p(\Omega)$ aufgefaßt werden kann. Außerdem läßt sich sehr einfach nachprüfen, daß die Elemente aus $\mathscr{L}_p(\Omega)$ Distributionen im Sinn von L. Schwartz sind.

Schließlich benötigen wir noch

LEMMA 2.2. *Für $1 \leqslant p < \infty$ ist $(C_0^\infty(\Omega), \|\ \|_p)$ dicht in $\mathscr{L}_p(\Omega)$, d.h. zu jedem $F \in \mathscr{L}_p(\Omega)$ gibt es eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|F-f_k\|_p \to 0$ für $k \to \infty$.*

*Beweis.* s. [5].

Dieses Lemma ist für unsere weiteren Untersuchungen entscheidend. Es liefert uns die Möglichkeit, Konvergenzbetrachtungen in $\mathscr{L}_p(\Omega)$ auf solche im Grundraum $C_0^\infty(\Omega)$ zurückzuspielen.

## 3. SINGULÄRE INTEGRALE IM RAUM $\mathscr{L}_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$

Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall $\Omega := (0, 1)$ und fordern von der Kernfunktion $\chi_n$, daß sie in $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ für $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. Durch (1.1) wird die folgende Definition nahegelegt:

DEFINITION 3.1. Sei $F \in \mathscr{L}_p(\Omega)$ und $\{f_k\}$ eine Folge aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|F-f_k\|_p \to 0$ für $k \to \infty$. Wir nennen die durch

$$F_n^s(x) = \lim_{k\to\infty} f_{k,n}^s(x) = \lim_{k\to\infty} \int \chi_n(x, u)\, f_k(u)\,du, \qquad x \in \bar{\Omega} \tag{3.1}$$

erklärte Funktion $F_n^s(x)$ singuläres Integral von $F$.

Wir zeigen, daß diese Definition sinnvoll ist, d.h. daß der Grenzwert

(3.1) existiert und unabhängig von der Wahl der Folge $\{f_k\}$ ist. Hierzu seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \bar{\Omega}$ beliebig (fest). Ferner sei

$$M_n := \max_{(x,u) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} |\chi_n(x, u)|. \tag{3.2}$$

(i) Existenz des Grenzwertes: Aufgrund der Hölderungleichung folgt wegen $\|f_k - f_j\|_p \to 0$ für $k, j \to \infty$

$$\begin{aligned} &\left| \int \chi_n(x, u)\, f_k(u)\, du - \int \chi_n(x, u)\, f_j(u)\, du \right| \\ &\leqslant \left( \int_\Omega |\chi_n(x, u)|^q\, du \right)^{1/q} \cdot \|f_k - f_j\|_p \\ &\leqslant M_n \|f_k - f_j\|_p \to 0 \qquad \text{für} \quad k, j \to \infty, \end{aligned} \tag{3.3}$$

so daß der Grenzwert (3.1) für jedes $x \in \bar{\Omega}$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert.

(ii) Unabhängigkeit von der Wahl der Folge $\{f_k\}$: Diese ergibt sich ähnlich wie (i).

(iii) Verträglichkeit mit der durch (1.1) gegebenen Definition: Sei $f \in C(\bar{\Omega})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_0(\Omega)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Da $(C_0^\infty(\Omega), \|\ \|_p)$ dicht in $(C_0(\Omega), \|\ \|_p)$ ist (vgl. z.B. [5]), existiert eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f - f_k\|_p \to 0$ für $k \to \infty$. Das durch $f$ induzierte Funktional $F_f$:

$$F_f \varphi = \int f\varphi\, dx \qquad \text{für} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.4}$$

gehört zu $\mathscr{L}_p(\Omega)$ (für $p = 1$ folgt dies aus Lemma 2.1) und wir erhalten mit Definition 3.1 wie in (i)

$$\begin{aligned} (F_f)_n^s(x) &= \lim_{k \to \infty} \int \chi_n(x, u)\, f_k(u)\, du \\ &= \int \chi_n(x, u)\, f(u)\, du, \qquad x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

also mit (1.1)

$$(F_f)_n^s(x) = f_n^s(x) \qquad \text{für} \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{3.5}$$

Im Fall stetiger Funktionen stimmen also die durch Definition 3.1 erklärten singulären Integrale mit den in üblicher Weise durch (1.1) definierten überein.

Der folgende Satz stellt eine distributionentheoretische Fassung des in § 1 genannten Resultats von W. Orlicz dar:

SATZ 3.1. *Sei $F \in \mathscr{L}_p(\Omega)$ und $F_n^s(x)$ das durch* (3.1) *erklärte singuläre Integral von F. Die Kernfunktion $\chi_n(x, u)$ $(n \in \mathbb{N})$ sei in $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ stetig und genüge* (1.2) *für alle x bzw. u aus Ω. Ferner gelte für alle Elemente h einer in $\mathscr{L}_p(\Omega)$ dichten Funktionenklasse $H(\Omega)$*

$$\|h - h_n^s\|_p \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

*Dann folgt*

$$\|F - F_n^s\|_p \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty, \tag{3.7}$$

*und es gilt die Abschätzung*

$$\|F_n^s\|_p \leqslant M \, \|F\|_p, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

*Beweis.* Sei $\{f_k\}$ eine Folge aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|F - f_k\|_p \to 0$ für $k \to \infty$. Die Folge $\{f_{k,n}^s\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert wegen (3.3) für $k \to \infty$ gleichmäßig in $\bar{\Omega}$ gegen $F_n^s(x)$. Da die Folgenelemente für alle $k$ und $n$ in $\bar{\Omega}$ stetig sind, gehört die Funktion $F_n^s(x)$ zu $C(\bar{\Omega})$ und das durch $F_n^s(x)$ induzierte Funktional (wir bezeichnen es, da wir es mit $F_n^s(x)$ identifizieren dürfen, ebenfalls mit $F_n^s$) zu $\mathscr{L}_p(\Omega)$. Zum Nachweis von (3.7) beachten wir, daß für $g \in C(\bar{\Omega})$ die Abschätzung

$$\|g_n^s\|_p \leqslant M \, \|g\|_p \tag{3.9}$$

gilt. Dies folgt mit Hilfe der Hölderungleichung bzw. mit dem Satz von Fubini für Riemann-Integrale. Beziehung (3.8) ergibt sich dann mit der Minkowski-Ungleichung und (3.9):

$$\begin{aligned} \|F_n^s\|_p &\leqslant \|F_n^s - f_{k,n}^s\|_p + \|f_{k,n}^s\|_p \\ &\leqslant \|F_n^s - f_{k,n}^s\|_p + M \, \|f_k\|_p, \end{aligned}$$

da $\{f_{k,n}^s(x)\}$ in $\bar{\Omega}$ gleichmäßig, und damit insbesondere bezüglich der $p$-Norm, gegen $F_n^s(x)$ konvergiert und $\|f_k\|_p \to \|F\|_p$ für $k \to \infty$ gilt.

Durch die Zuordnung $F \mapsto F_n^s$ ist daher eine gleichmäßig beschränkte Folge von linearen Operatoren erklärt, die $\mathscr{L}_p(\Omega)$ in sich abbilden. Da $H(\Omega)$ nach Voraussetzung dicht in $\mathscr{L}_p(\Omega)$ ist, folgt (3.7) aufgrund des Satzes von Banach-Steinhaus. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

*Folgerung* 1. Sei $H(\Omega) := (C_0(\Omega), \| \ \|_p)$. Ferner sei die Kernfunktion $\chi_n$ nicht negativ und erfülle neben den Voraussetzungen aus Satz 3.1 zusätzlich für $0 < \delta < 1$ und $0 < x < 1$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \int_{|u-x| < \delta} \chi_n(x, u) \, du = 1, \\ &\lim_{n \to \infty} \int_{|u-x| \geqslant \delta} \chi_n(x, u) \, du = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

gleichmäßig im Intervall $[\eta, 1-\eta]$, $\eta > 0$ beliebig (fest). Dann gilt die Aussage von Satz 3.1.

*Beweis.* Für $h \in C_0(\Omega)$ und $\eta > 0$ konvergiert $\{h_n^s(x)\}$ aufgrund von (3.10) für $n \to \infty$ gleichmäßig in $[\eta, 1-\eta]$ gegen $h(x)$. Hieraus folgt, wenn wir $\eta$ so wählen, daß $\operatorname{supp} h \subset [\eta, 1-\eta]$ ist: $\|h - h_n^s\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Da $(C_0(\Omega), \| \ \|_p)$ dicht in $\mathscr{L}_p(\Omega)$ ist, folgt aus Satz 3.1 die Behauptung.

*Folgerung* 2. Für $p = 1$ seien die Voraussetzungen von Folgerung 1 erfüllt. Dann gilt

$$F\varphi = \lim_{n \to \infty} \int F_n^s(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \text{für} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.11}$$

*Bemerkung.* Konvergenzaussage (3.11) stellt eine distributionentheoretische Entsprechung eines Resultats über punktweise Konvergenz für Funktionen $f$ aus $L_1(\Omega)$ dar [2, S. 314ff.].

## 4. Anwendung auf das singuläre Integral von Landau

Das singuläre Integral von Landau ist für $f \in C[0, 1]$ durch

$$J_n(f; x) = \int_0^1 c_n[1-(u-x)^2]^n f(u)\, du, \qquad x \in [0, 1] \tag{4.1}$$

mit der Konstanten

$$c_n = \left[\int_{-1}^1 (1-u^2)^n\, du\right]^{-1} \tag{4.2}$$

erklärt. Für $\eta > 0$ gilt (s. z.B. [1, p. 38])

$$\lim_{n \to \infty} J_n(f; x) = f(x) \qquad \text{gleichmäßig in } [\eta, 1-\eta]. \tag{4.3}$$

Hieraus folgt insbesondere für $h \in C_0(0, 1)$ und $\eta$ mit $\operatorname{supp} h \subset [\eta, 1-\eta]$

$$\|J_n(h; \cdot) - h\|_p \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{4.4}$$

Definieren wir für $F \in \mathscr{L}_p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, die Landauschen singulären Integrale $L_n^s(x)$ durch

$$L_n^s(x) = \lim_{k \to \infty} \int_0^1 c_n[1-(u-x)^2]^n f_k(u)\, du, \qquad x \in [0, 1] \tag{4.5}$$

wobei $\{f_k\}$ eine Folge aus $C_0^\infty(0, 1)$ mit $\|F-f_k\|_p \to 0$ für $k \to \infty$ ist, so erhalten wir aufgrund der Resultate aus § 3.

SATZ 4.1. (a) *Sei* $F \in \mathscr{L}_1(0, 1)$. *Dann gilt*

$$F\varphi = \lim_{n \to \infty} \int L_n^s(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \textit{für} \quad \varphi \in C_0^\infty(0, 1). \tag{4.6}$$

(b) *Für* $F \in \mathscr{L}_p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, *gilt*

$$\|F - L_n^s\|_p \to 0 \qquad \textit{für} \quad n \to \infty \tag{4.7}$$

*und die Abschätzung*

$$\|L_n^s\|_p \leqslant M\, \|F\|_p, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

## LITERATUR

1. R. A. DEVORE, "The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
2. I. P. NATANSON, "Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen," Berlin, 1961.
3. W. ORLICZ, Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen, *Studia Math.* **5** (1934), 127–140.
4. P. WERNER, A distribution-theoretical approach to certain Lebesgue and Sobolev spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **29** (1970), 18–78.
5. P. WERNER, Bemerkungen zur Theorie der $L_p$-Räume, *J. Reine Angew. Math.* **239/240** (1970), 401–434.